可積分力学系と非可積分力学系(III.カオスとソリトン,ソリトン系のダイナミクスとそれに関するカオスの問題,基研長期研究会報告)

吉田, 春夫

（２変数の逓減方程式）で良く近似される。２－ソリトンを含む初期条件に，１つの周波数をもつ外場を加えると，２つのソリトンの結合状態が外場との共鳴によりアトラクターとして生き延びるか，又は，２つの同一のソリトン（１－ソリトンのアトラクター）に分裂する場合に分類されることがわかった。外場の周波数成分の数を増やすと，更に複雑な分岐が起こると予想されるが，その１つの極限の場合は，参考文献 2）で議論した。

参考文献及び関連文献

1) J. Satsuma and N. Yajima, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 55, 284 (1974).
2) K. Nozaki and N. Bekki, Phys. Rev. Lett. **50**, 1226 (1983).
3) D. J. Kaup and A. C. Newell, Phys. Rev. **B18**, 5162 (1978).
4) K. Nozaki, Phys. Rev. Lett. **49**, 1883 (1982).
5) D. W. McLaughlin, J. V. Moloney and A. C. Newell, Phys. Rev. Lett. **51**, 75 (1983).

可積分力学系と非可積分力学系

東大・天文　　吉　田　春　夫

具体的に与えられた Hamilton 力学系の積分不可能性を証明することは一般に困難で，普遍的な判定条件は知られていない。本稿では解の多価性と積分不可能性を結びつけた Ziglin の定理を紹介し，その応用例として４次のポテンシャルを持つ力学系の積分不可能性を証明する。

自由度２の Hamilton 系

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+\frac{1}{4}(q_1^4+q_2^4)+\frac{\varepsilon}{2}q_1^2q_2^2 \tag{1}$$

はその対称性より自明な特殊解（周期解）

$$q_1\equiv 0 \tag{2}$$

を有する。$q_2(t)$ は

$$\ddot{q}_2+q_2^3=0$$

の解で積分定数を fix することにより，

$$q_2 = \mathrm{cn}\,(t,\ \frac{1}{\sqrt{2}}) \quad \text{Jacobi の楕円関数} \tag{3}$$

となる。 Hamilton 系 (1) の (2) なる特殊解に対する変分方程式 (Variational Equations) は

$$\delta q_i \equiv \xi_i$$

とおいて

$$\ddot{\xi}_1 + \varepsilon \{\mathrm{cn}(t)\}^2 \xi_1 = 0 \tag{4}$$

$$\ddot{\xi}_2 + 3\{\mathrm{cn}(t)\}^2 \xi_2 = 0 \tag{5}$$

と書ける。(4) は特に特殊解 (2) に対して垂直成分の変位を記述し解の安定性をきめる。(4) を Ziglin に従って Normal Variational Equation と呼ぶことにする。

(4) の係数 $\{\mathrm{cn}(t)\}^2$ は複素変数 t の２重周期関数で２つの独立な周期

$$T_1 = 2K, \quad T_2 = 2\,\mathrm{i}\,K'$$

を有する。そして古典的な Floquet の定理により，(4) の解の基本系 $\Xi(t)$ に対して

$$\Xi(t+T_j) = \Xi(t) M_j \quad (j=1,\ 2) \tag{6}$$

で定義される２×２の定数行列 M_j（モノドロミー行列）が各周期 T_j に対して定まる。モノドロミー行列の固有値は $\det(M_j) = 1$ なることより $(\lambda_j,\ \lambda_j^{-1})$ なる組となり，これらは特性乗数（ Floquet 乗数）と呼ばれる。

今，特性乗数 λ_j に対して $(\lambda_j)^k = 1$ となる整数 k は $k=0$ に限られる時， M_j を n-resonant と呼ぶことにする。 この状況のもとで次の定理が成り立つ。

定理 (Ziglin, 1983)

Hamilton 系 (1) が Hamiltonian H と独立な meromorphic な第１積分 $\Phi = \mathrm{const.}$ を有するとし，かつある特殊解に対して Normal Variational Equation の２つのモノドロミー行列 M_1，M_2 が共に non-resonant であるとする。この時 M_1，M_2 は可換，i.e. $\{M_1,\ M_2\} = 0$ でなければならない。

一般に周期係数の微分方程式に対してそのモノドロミー行列の（それどころか特性乗数すら）

具体的な表式を与えることは不可能に近い。しかるに(4)は独立変数の変換

$$z = \{ \mathrm{cn}(t) \}^4$$

によってGaussの超幾何方程式

$$z(1-z)\frac{d^2\xi}{dz^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]\frac{d\xi}{dz} - \alpha\beta\xi = 0 \tag{7}$$

に変換されるという特殊事情によりモノドロミー行列の具体的な表現が可能である。その結果(Yoshida, 1984) M_1, M_2 について共通に

$$\lambda + \lambda^{-1} = 2\sqrt{2}\cos\left[\frac{\pi}{4}\sqrt{1+8\varepsilon}\right] \tag{8}$$

という表式が得られ，また

$$\{M_1, M_2\} = 0 \text{ は } \lambda + \lambda^{-1} = \pm 2$$

という条件に帰着されることがわかる。

今，$|\lambda + \lambda^{-1}| > 2$ なる ε の領域

$$\varepsilon < 0,\ 1 < \varepsilon < 3,\ 6 < \varepsilon < 10,\ 15 < \varepsilon < 21,\ \cdots \tag{9}$$

を考えると，λ が実数（そして(4)の解は指数関数的に不安定）となることより M_1, M_2 共に non-resonant である。よって Ziglin の定理により $\Phi = \mathrm{const}$ なる積分が存在するためには

$$\{M_1, M_2\} = 0,\ \text{i.e.}\ \ \lambda + \lambda^{-1} = \pm 2$$

とならなければならないが，これは明らかに不可能である。よって(9)なる ε の領域においてHamilton系(1)は積分不可能であることが証明される。

(1)の別の特殊解

$$q_1 \equiv q_2 \tag{10}$$

から(4)で

$$\varepsilon \to \varepsilon' = (3-\varepsilon)/(1+\varepsilon)$$

と置きかえたNormal Variational Equationが得られる。そこで同じ議論をくり返せば ε' が(9)

なる領域にある時，すなわち ε が

$$\varepsilon > 3,\ 1 > \varepsilon > 0,\ -3/7 > \varepsilon > -7/11,\ \cdots \tag{11}$$

なる領域にある時，$\Phi = \mathrm{const.}$ の存在が否定される。(9) と (11) を合わせて結局

$$\varepsilon = 0,\ 1,\ 3$$

なる積分可能な場合以外での積分不可能性が証明できたことになる。

文　献

Ziglin, S. L., Funct. Anal. Appl., **16** (1983), 181, **17** (1983), 6.
Yoshida, H., Celest. Mech., **32** (1984), No. 1 in press, and in preparation.

DNA二重らせん変形の自由エネルギー

東大・薬　坪 井 正 道

1. はじめに

筆者に与えられた課題は，

(A) DNA 二重らせんにソリトンと呼べるような，安定なかたまりとして伝播する構造欠陥が有得るか？

(B) それはどんな実験に反映し得るか？

であったと理解している。DNA 二重らせんの性質については，最近別に紹介する機会[1-3]を与えられているので，ここではすぐに本論に入ることにする。

2. 安定に伝播する欠陥

上記(A)に対する答えとして，設問に合致する構造欠陥は図1の(d)のようなものであるといえる。これは，無傷のDNA二重らせん(a)から，まず1ピッチぶんの鎖間水素結合を切って(b)，次に(c)のように一方の鎖に切断をつくり，他方の鎖をしてこの切断箇所をくぐらしめ，そのあと切断をつないだとしたらできるであろうような欠陥である。これは，トポロジカ